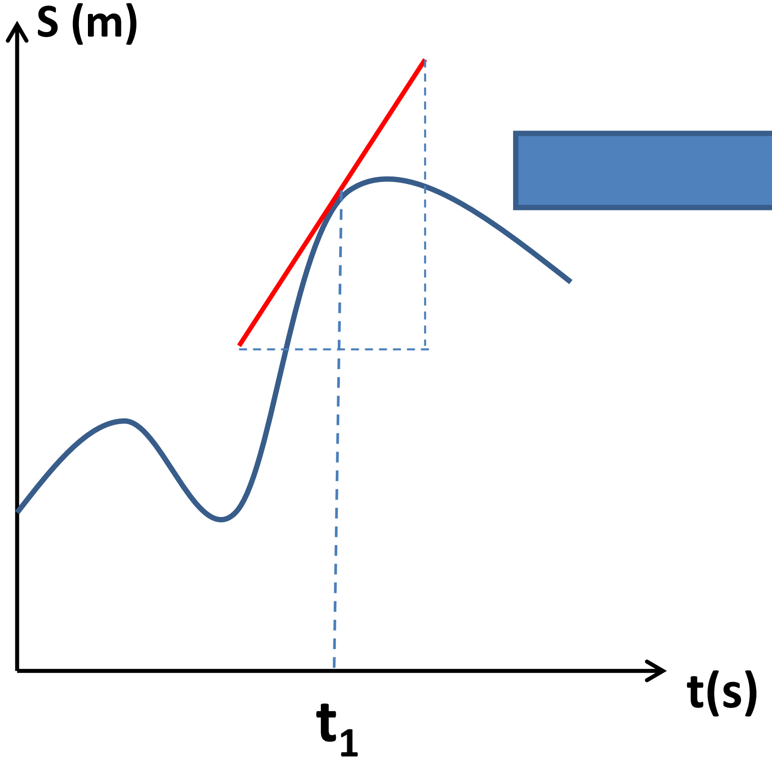
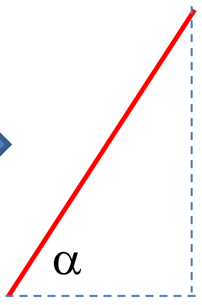
Derivadas e Integrais: Fundamentos para Biomecânica

Prof. Dr. Guanis de Barros Vilela Junior

O que é uma derivada?





$$tg\alpha = \Delta S/\Delta t$$

O que é uma derivada?

A derivada de uma função **y = f(x)** num ponto **x = $\mathbf{x_0}$** , é igual ao valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica à curva representativa de **y=f(x)**, no ponto **x = $\mathbf{x_0}$**, ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto **$\mathbf{x_0}$**.

A derivada de uma função y = f(x), pode ser representada também pelos símbolos: **y'** , **dy/dx** ou **f ' (x)**.

A derivada de uma função f(x) no ponto x_0 é dada por:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivadas Básicas

Nas fórmulas abaixo, **w** e **v** são funções da variável ***t***;
a, **b**, **c** e **n** são constantes.

Derivada de uma constante $\frac{d(c)}{dt} = 0$ $\frac{d(ct)}{dt} = c$

Derivada da potência $\frac{d(t^n)}{dt} = n.t^{n-1}$

Portanto, quando *n = 1*: $\frac{d(t)}{dt} = 0$

Exemplo: $\frac{d(5t)}{dt} = 5$

Derivadas Básicas

Derivada da Soma / Subtração:

$$\frac{d(w \pm v)}{dt} = \frac{dw}{dt} \pm \frac{dv}{dt}$$

Exemplo: As funções $w = 2t^3 + 2t^2$ e $v = t^2 - 4t$; calcule a 1ª derivada de $(w + v)$ em função de t.

$$\frac{dw}{dt} = 2 \,.\, 3 \,.\, t^{(3-1)} + 2 \,.\, 2 \,.\, t^{(2-1)} = 6\,t^2 + 4t$$

$$\frac{dv}{dt} = 2t - 4$$

Logo a derivada da soma de w e v é:

$(6t^2 + 4t) + (2t - 4)$ $\mathbf{= 6t^2 + 6t - 4}$

Derivadas Básicas

Derivada do produto entre uma constante e uma variável:

$$\frac{d(cv)}{dt} = c.\frac{dv}{dt}$$

Exemplo: Se **c** = 3 e **v** = $2t^4 - 3t^3 + t^2 - 1$

Teremos: $3\,(8t^3 - 9t^2 + 2t) = \mathbf{24t^3 - 27t^2 + 6t}$

Derivada do Produto:

$$\frac{d(wv)}{dt} = w.\frac{dv}{dt} + v.\frac{dw}{dt}$$

Derivadas Básicas

Exemplo de Derivada do Produto:

Sejam as funções: $\mathbf{v = 3t^4 - 2t^2 + 2t}$ e $\mathbf{w = 2t^3 + 2t^2 - 2t}$

Calcule a derivada de **w . v** em função de t. Plot o gráfico.

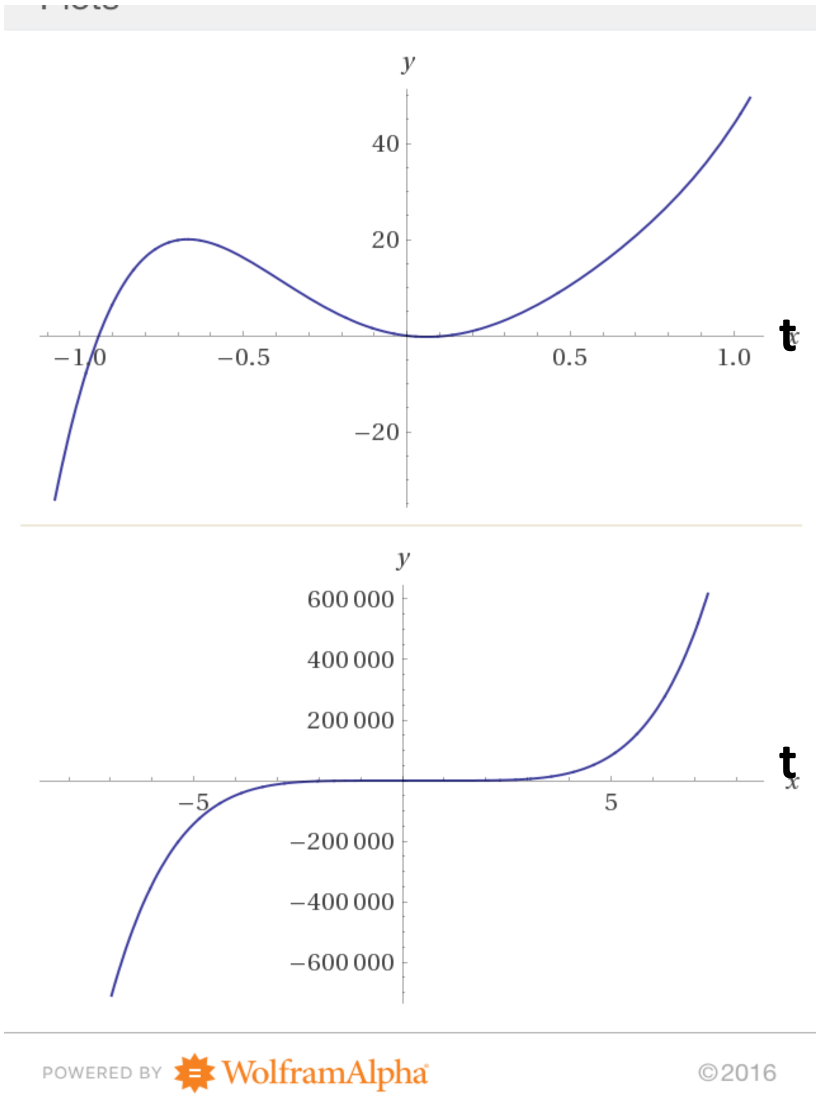
$$\frac{d(wv)}{dt} = w.\frac{dv}{dt} + v.\frac{dw}{dt}$$

$$= \mathbf{(2t^3 + 2t^2 - 2t).\ (12t^3 - 4t + 2) + (3t^4 - 2t^2 + 2t)\ .\ (6t^2 + 4t - 2)}$$

$$\mathbf{= 42t^6 + 36t^5 - 50t^4 + 24t^2 - 8t}$$

Derivadas Básicas

Para plotar o gráfico de $42t^6+36t^5-50t^4+24t^2-8t$ basta para t entre -10 e +10



Derivadas Básicas

Derivada da Divisão

$$\frac{d(w/v)}{dt} = \frac{v \, . \, \frac{dw}{dt} \; - \; w. \frac{dv}{dt}}{v^2}$$

Derivadas Básicas

Potência de uma função

$$\frac{d(v^n)}{dt} = n.v^{n-1} . \frac{dv}{dt}$$

Exemplo: Seja a função: $V = 2t^2 + t$; calcule a derivada de v^2 em função do tempo. Construa o gráfico.

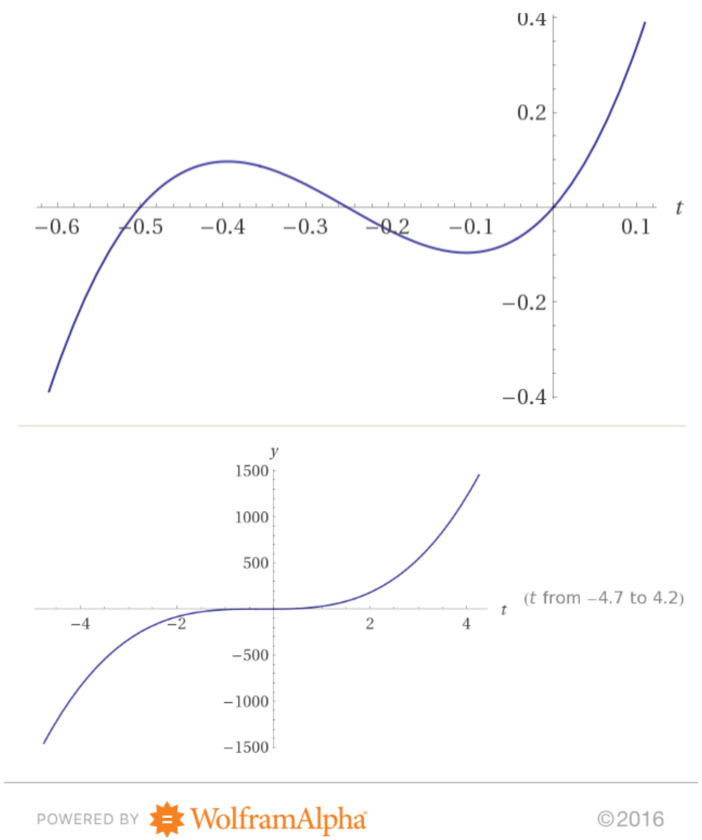
$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2 . (2t^2 + t)^{2-1} . (4t + 1)$$

Logo: $(4t^2 + 2t) . (4t + 1) = 16t^3 + 12t^2 + 2t$

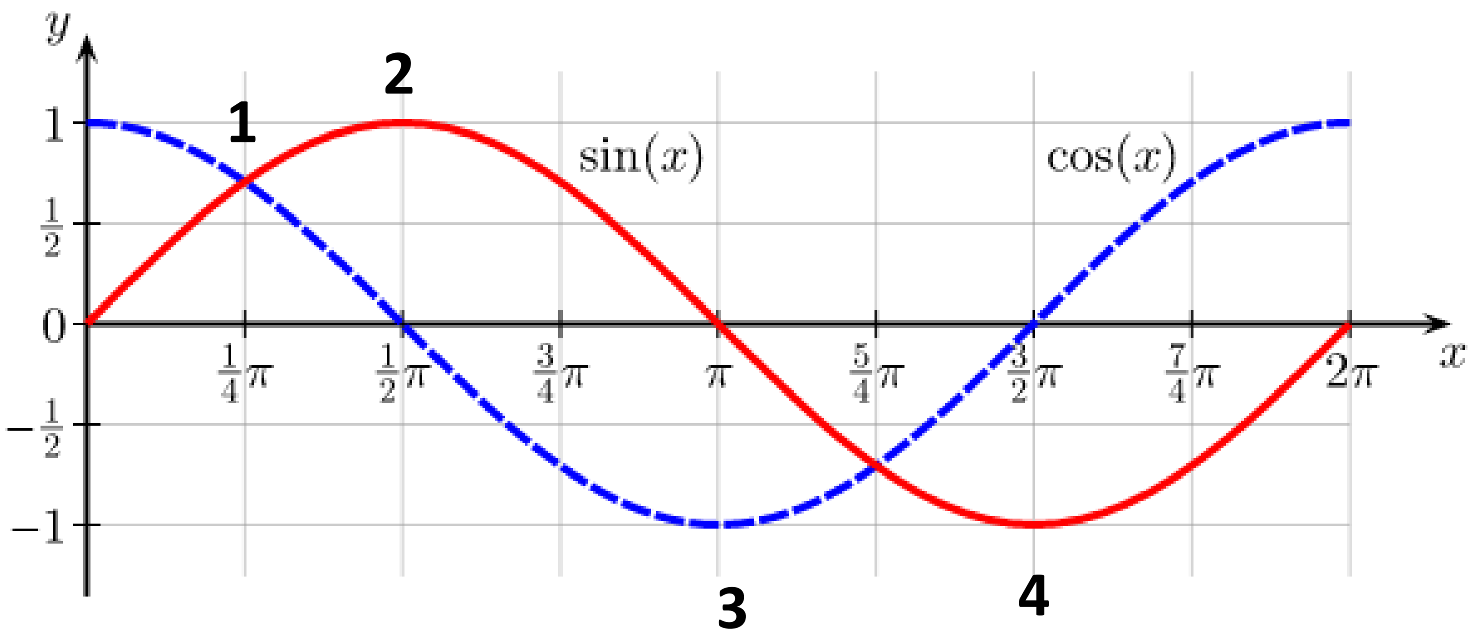
Derivadas Básicas

Para obter o gráfico da função obtida entre -10 e +10 teremos:

$$(4t^2 + 2t) \cdot (4t + 1) = 16t^3 + 12t^2 + 2t$$



Derivadas de Funções Trigonométricas



No Ponto **1:** sin(x) = cos(x)

No Ponto **2:** sin(x)=1 e cos(x)= π/2

No Ponto **3:** sin(x)= π e cos(x)= -1

No Ponto **4:** sin(x)= -1 e cos(x)= (3π)/2

Obs:

1) derivada do sin(x) = cos(x)

2) A derivada do cos(x) = - sin(x)

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\text{ sen } x$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg } x] = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cotg } x] = -\text{ cossec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \,.\, \text{tg } x$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cossec } x] = -\text{ cossec } x \,.\, \text{cotg } x$$

Derivadas de ordens superiores

- Derivada de Ordem 2 : É a derivada da primeira derivada .

$$\textit{Notações}: \quad f'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad D^2 f .$$

- Derivada de Ordem 3 : É a derivada da segunda derivada .

$$\textit{Notações}: \quad f''' \quad \text{ou} \quad \frac{d^3 f}{dx^3} \quad \text{ou} \quad D^3 f .$$

- Derivada de Ordem 4 : É a derivada da terceira derivada .

$$\textit{Notações}: \quad f^{(iv)} \quad \text{ou} \quad \frac{d^4 f}{dx^4} \quad \text{ou} \quad D^4 f .$$

- Derivada de Ordem n : É a derivada da derivada de ordem $n-1$.

$$\textit{Notações}: \quad f^{n} \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{ou} \quad D^n f .$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

Exemplo:

Calcule a derivada primeira (y’) de y = sen 3x + cos 2x

$$Y' = \cos 3x \, \frac{d(3x)}{dx} - \operatorname{sen} 2x \, \frac{d(2x)}{dx}$$

Logo: $Y' = 3 \cos 3x – 2 \operatorname{sen} 2x$

Estudo Dirigido II

1) Calcule (w-z)’, sendo: $w = 2t^3 + t^2$ e $z = 3t^2 – 3t$

2) Calcule (w-z)’’, sendo: $w = 2t^3 + t^2$ e $z = 3t^2 – 3t$

3) Calcule (w/z)’, sendo: $w = 2t^3 + t^2$ e $z = 3t^2 – 3t$

4) Se $Y = \text{tg } x^2$, calcule Y’.

5) Se $Y = X^{4/3}$, calcule Y’

Gabarito - Estudo Dirigido II

1) Calcule $(w-z)'$, sendo: $w = 2t^3 + t^2$ e $z = 3t^2 - 3t$

$(w-z)' = (6t^2 + 2t) - (6t - 3) = \mathbf{6t^2-4t+3}$

2) Calcule $(w-z)''$, sendo: $w = 2t^3 + t^2$ e $z = 3t^2 - 3t$

$(w-z)'' = (6t^2-4t+3)' = \mathbf{12t-4}$

3) Calcule $(w/z)'$, sendo: $w = 2t^3 + t^2$ e $z = 3t^2 - 3t$

$W' = 6t^2+2t$ $Z' = 6t-3$

$(w/z)' = ((z).(w)')-((w).(z)')/ (z)^2 = \mathbf{(2t^4-6t^3-t^2)/(3t^4-6t^3+3t^2)}$

Gabarito - Estudo Dirigido II

4) Se $Y = \text{tg } x^2$, calcule Y'.

$$Y' = \sec^2 . x^2 . \frac{d(x^2)}{dx} \quad \mathbf{= 2x \sec^2 x^2}$$

5) Se $Y = X^{4/3}$, calcule Y'

$$Y' = (4/3).x.^{(4/3)-1}$$

$$\mathbf{Y' = (4/3).x.^{(1/3)}}$$