FUNDAMENTOS DO CÁLCULO VETORIAL PARA A BIOMECÂNICA

Prof. Dr. Guanis de Barros Vilela Junior

Grandezas Escalares x Grandezas Vetoriais

- **Grandeza Escalar**: apenas o valor numérico informa tudo a respeito de uma variável. *Exemplos*: temperatura; massa corporal; potência; energia cinética.
- **Grandeza Vetorial**: apenas o valor numérico não é suficiente para compreendê-la totalmente. *Exemplos*: Força, Posição; Velocidade; Aceleração, Impulso; Torque; Quantidade de Movimento.

Características da Grandeza Vetorial

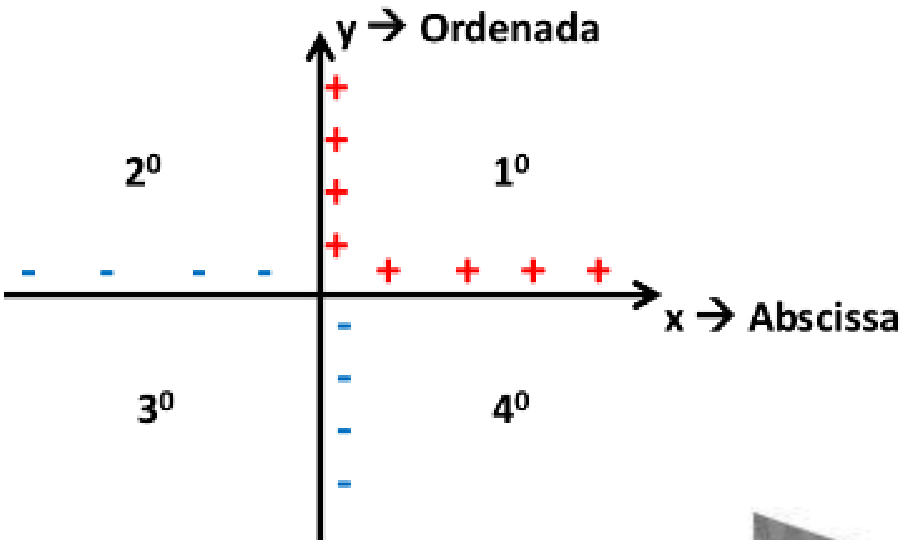
V

Módulo ou Intensidade: valor numérico ou modular da grandeza vetorial

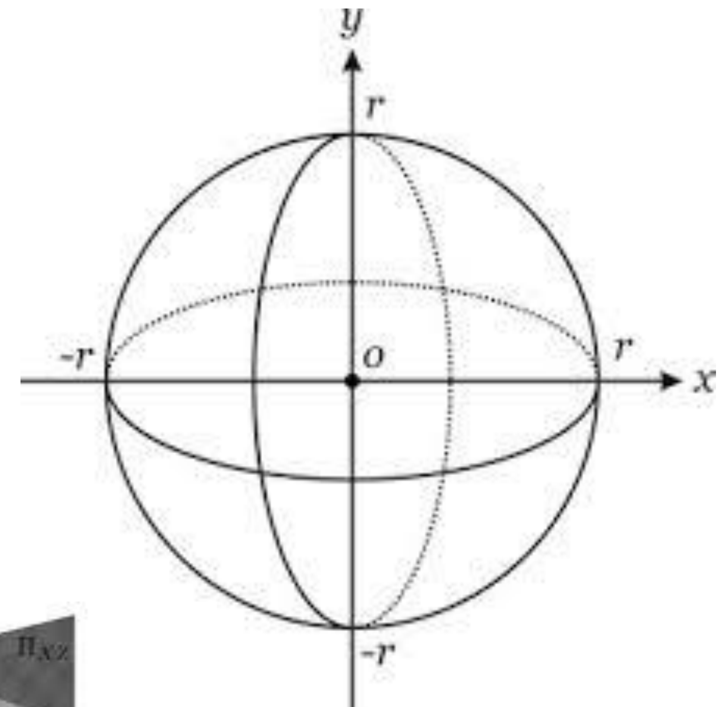
Direção: menor ângulo que o vetor forma com o eixo referencial (usualmente o eixo x)

Sentido: quadrante para o qual o vetor aponta

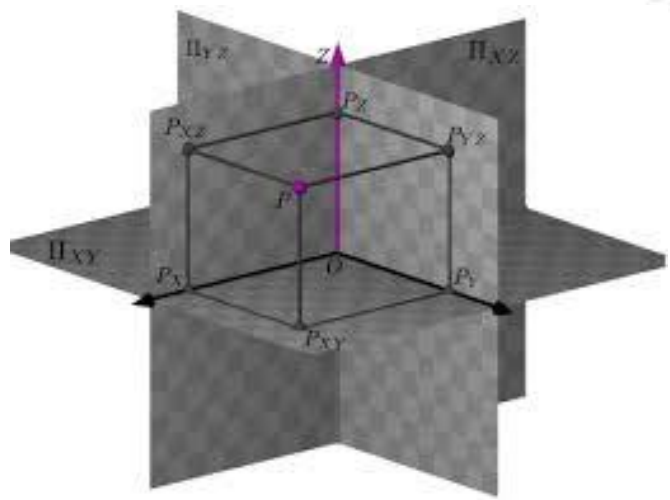
Exemplos:



y → Ordenada
x → Abscissa
2^0
1^0
3^0
4^0



y
r
-r
O
r
x
-r



Π_{YZ}
Z
Π_{XZ}
P_Z
P_{XZ}
P_{YZ}
P
Π_{XY}
P_X
O
P_Y
P_{XY}

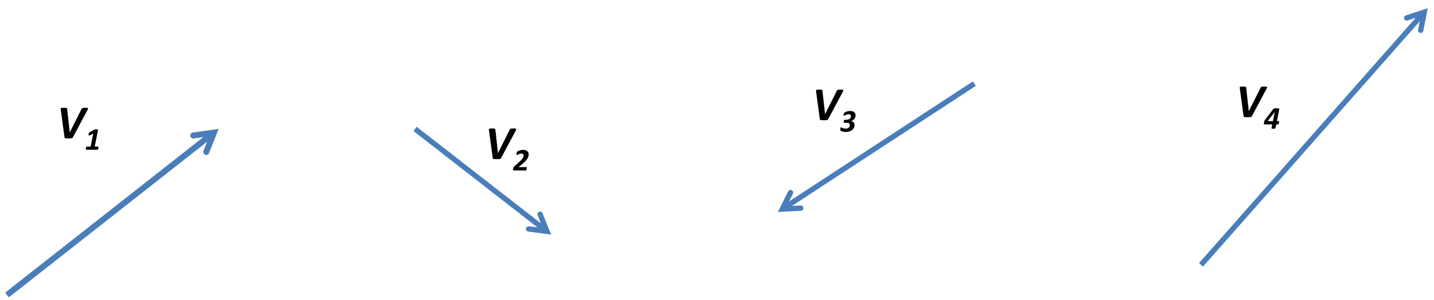
Operações Vetoriais Básicas

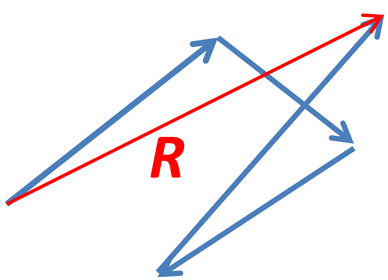
- Veremos como somar e/ou subtrair dois ou mais vetores pelos métodos:

- 1) Vetorial
- 2) Paralelogramo
- 3) Decomposição Vetorial
- 4) Analíticos

Método Vetorial

Soma de dois ou mais vetores:





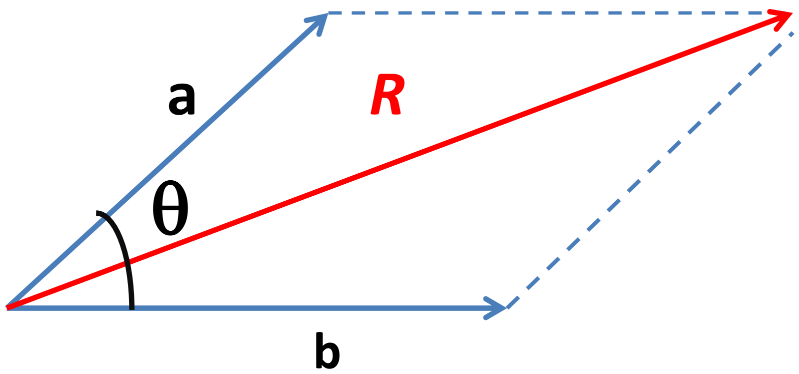
R

M: 10 m/s

D: 30º

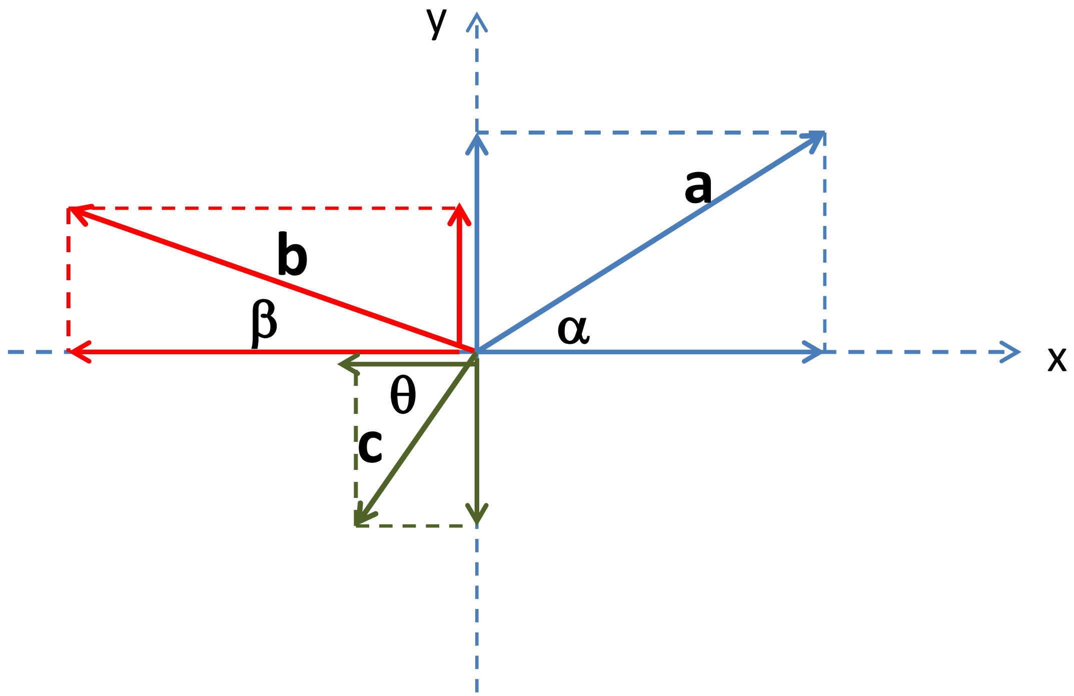
S: I Quadrante

Método do Paralelogramo



$$R^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\theta$$

Método da Decomposição Vetorial



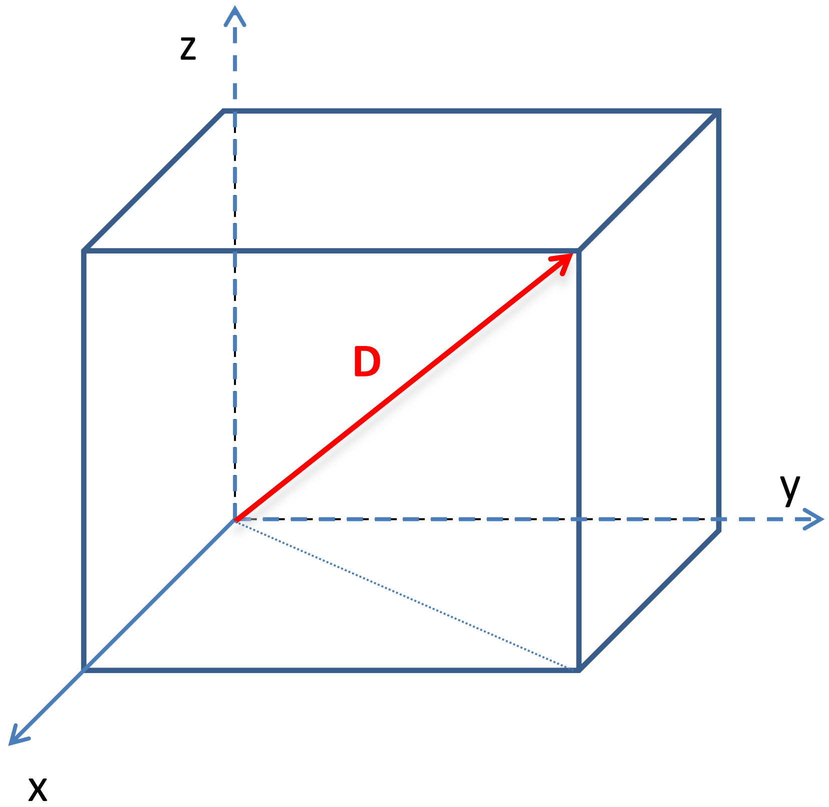
$$R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2$$

Métodos Analíticos

- ***Veremos***:

- Diagonal de um cubo
- Distância entre dois pontos do espaço 3D
- Produto Escalar
- Ângulo entre vetores
- Produto Vetorial

Vetores no espaço 3D



Um cubo de aresta **a**

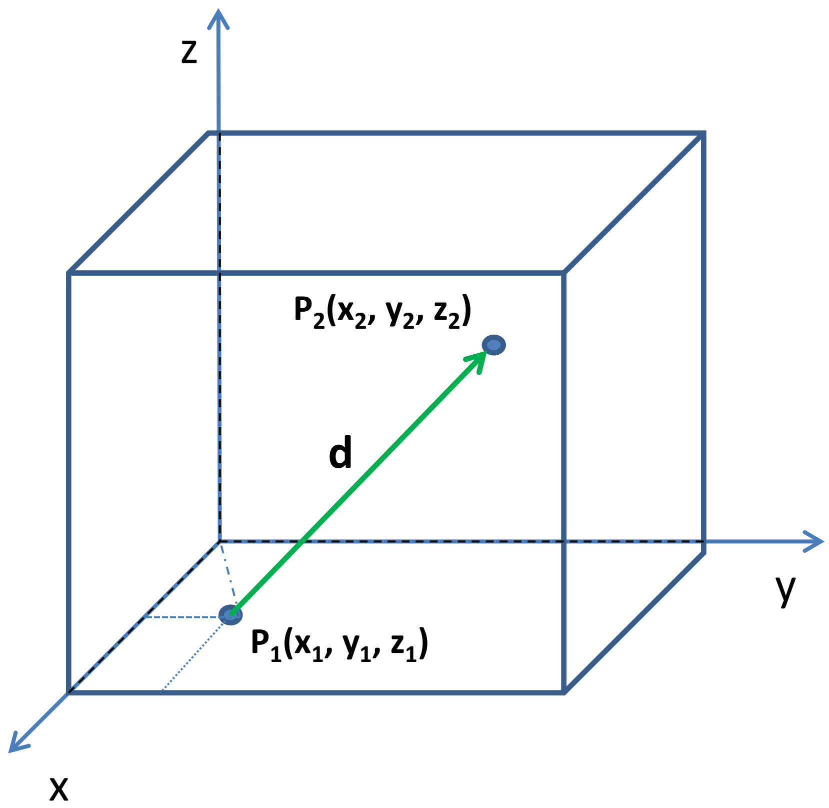
Possui diagonal **D**:

$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$

$D = 3 . a^2$

$D = \sqrt{3} . a$

Distância entre dois pontos no espaço 3D



$\mathbf{P_1}(3, 2, 1)$ e $\mathbf{P_2}(6, 7, 7)$

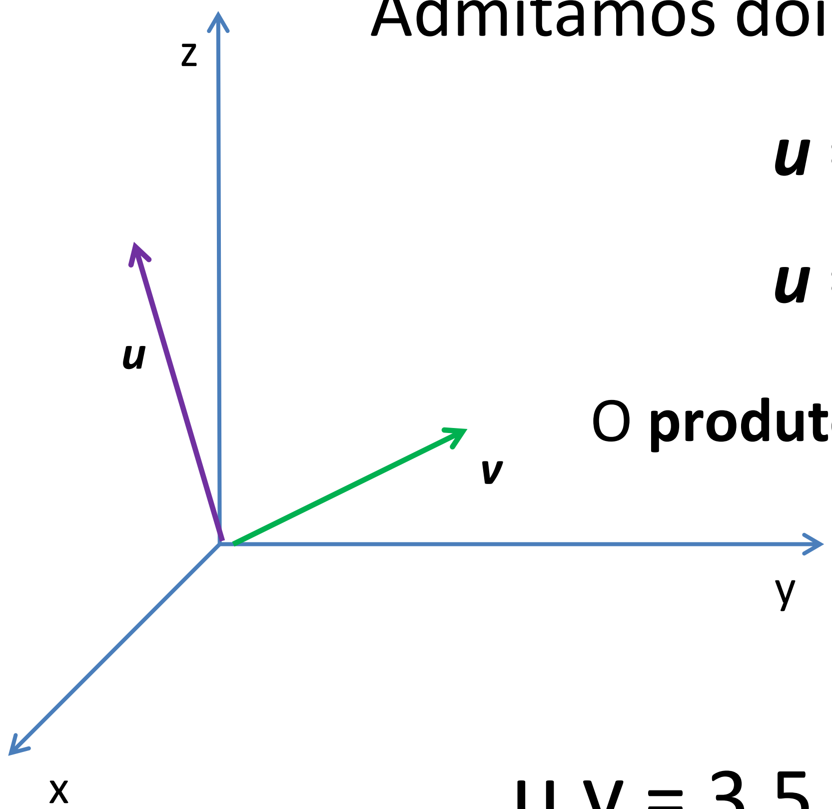
$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (7 - 2)^2 + (7 - 1)^2}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (6)^2}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{70} = 8{,}36 \text{ cm}$$

Produto Escalar entre dois vetores



Admitamos dois vetores, ***u*** e ***v*** no espaço

u = (x_1, y_1, z_1) e ***v*** = (x_2, y_2, z_2)

u = (3, 2, -4) e ***v*** = (5, 0, 1)

O **produto escalar** é um número real dado por:

$$u.v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$u.v = 3.5 + 2.0 + (-4).1 = 15+0-4 = 11$$

Produto Escalar entre dois vetores

- <u>**Módulo de um Vetor**</u>: é o valor absoluto do mesmo

- Admitamos o vetor *u* = (x_1, y_1, z_1)

- Seu módulo $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$

- Exemplo: u= (1, 2, 3)
  $|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$

Produto Escalar entre dois vetores

- <u>**Vetores Paralelos**</u>: quando um é múltiplo do outro. Ou seja: ***u***= k.***v***, onde k é uma constante
- Então**:** $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

- <u>**Vetores Perpendiculares**</u>: quando o produto escalar entre os vetores for nulo, ou seja: $u.v=0$ logo: $\mathbf{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0}$

Ângulo entre dois vetores

- Se: 0º < θ < 180º, o ângulo entre dois vetores não nulos é:

$$\textbf{Cos } \theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Exemplo: *u*= (2, 1, 1) e *v*= (1, 2, 1)

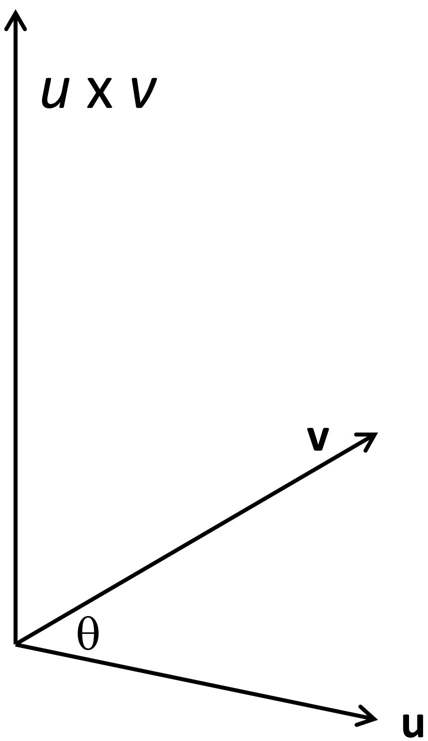
$$\textbf{Cos } \theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} =$$

$$= (2.1 + 1.2 + 1.1)/\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}\,.\,\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}$$

$= (5)/(\sqrt{6} * \sqrt{6}\,)$ = 5/6= 0,83 ou seja **θ = 33,55 graus**

Produto Vetorial entre dois vetores

Dados dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$



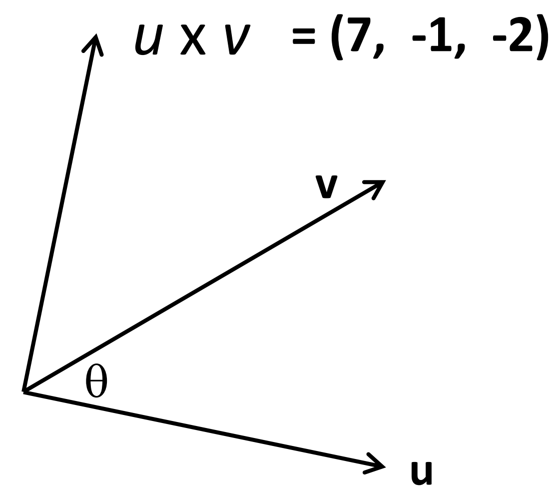
$$u \times v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Regra da mão esquerda

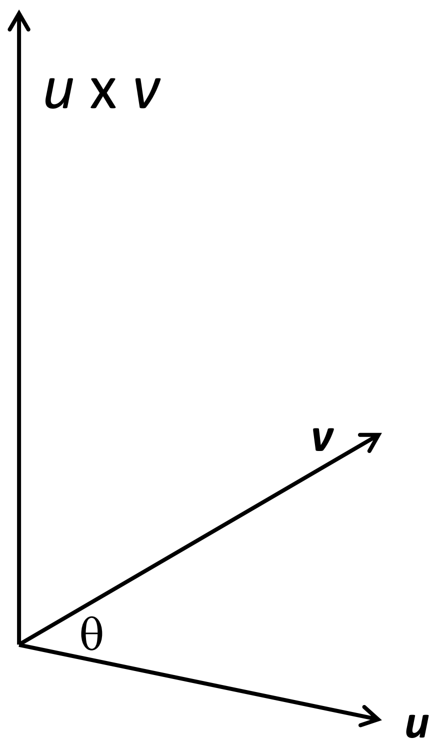
Produto Vetorial entre dois vetores

Exemplo: $u = (1, 3, 2)$ e $v = (2, 4, 5)$, então:

$$u \times v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (7,\ -1,\ -2)$$



Módulo do Produto Vetorial



$$|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen} \theta$$

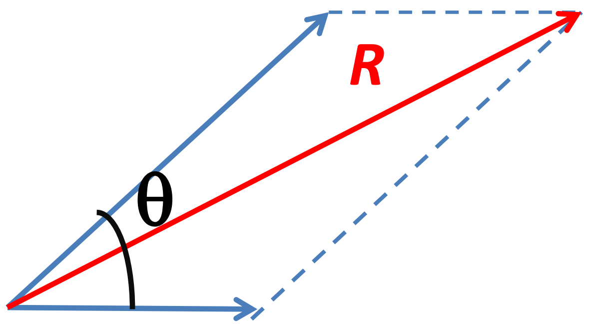
Quando $\theta = 90^o$

$$|u \times v| = |u||v|$$

Aplicações na Biomecânica

- Produto Escalar entre dois vetores; Exemplos:
- Trabalho mecânico (entre as grandezas vetoriais Força e Deslocamento; unidade: Joules)
- Potência (entre as grandezas vetoriais Força e velocidade; unidade: Watts)
- Determinação de eixos e planos para a análise cinemática (2D e 3D).

Estudo Dirigido I



1) O desenho ao lado mostra dois vetores (V_1 e V_2) que representam as velocidades do centro de massa de um disco (atletismo) e do vento, respectivamente. Sabe-se que seus módulos valem V_1 = 30m/s e V_2 = 5m/s. Calcule o vetor resultante R.

   Dado: $\theta = 45^0$

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\theta$$

$R^2 = 30^2 + 5^2 + 2.\ 30.\ 5\ .\ \cos45$

$R^2 = 30^2 + 5^2 + 2.\ 30.\ 5.\ \cos45$

$R^2 = 900 + 25 + 300\ .\ 0{,}71 = 1138$

Logo R = 33,73 m/s

R
- M- 33,73m/s
- D- $\sin\alpha = 21{,}21/33{,}73 = 0{,}62$
  Logo: $\alpha = 38{,}31^o$
- S- 1º quadrante

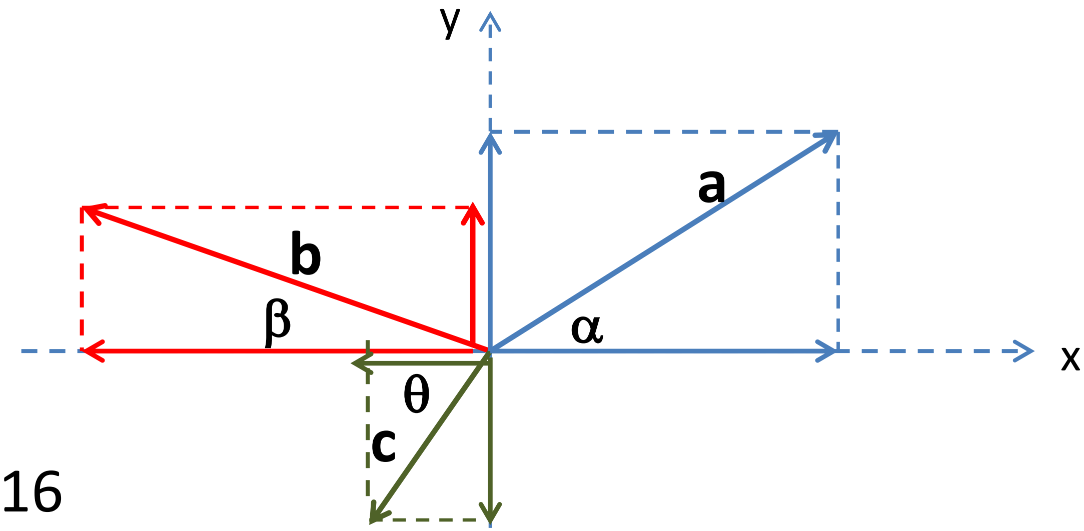
Lei dos Senos

Estudo Dirigido I

2) Calcule a soma vetorial (**R**) das forças coplanares **a, b** e **c**, cujos módulos são respectivamente, 100N, 80N e 40N.
Sabe-se que $\alpha = 53^0$,; $\beta = 30^0$ e $\theta = 45^0$

$\mathbf{R_x}$ = a.cos α – b. cos β – c . Cos θ =
100. 0,60 – 80. 0,87 – 40. 0,71 = **- 38N**

$\mathbf{R_y}$ = a.sen α – b. sen β – c . sen θ =
100. 0,80 + 80. 0,50 – 40. 0,71 = **91,58N**

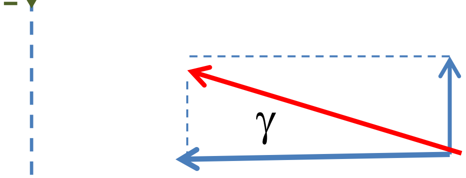


$R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2$

$R^2 = (-38)^2 + (91,58)^2 = 9784,16$

R = 98,91N

R
- M: 98,91N
- D: tg γ= (91,58/38) = 2,41 ou 67,46°
- S: 2º quadrante



Estudo Dirigido I

3) Três pontos no espaço 3D, não coplanares, sempre determinam um plano. São eles: $P_1=(1; 2; 0)$; $P_2=(3; 4; 7)$ e $P_3=(-1; 0; 4)$. Calcule a área e o perímetro do triângulo formado por estes pontos.

$[P1-P2] = (-2, -2, -7)$ e $[P1-P3] = (2, 2, -4)$

$$[P1P2] \times [P1P3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (8-(2.(-7)) - (8-(-14)) + (-4-(-4)) \quad \mathbf{= (22, -22, 0)}$$

$$\text{Área}_{\Delta} = \frac{|[P1P2] \times [P1P3]|}{2} = \frac{((22)^2 + (-22)^2 + (0)^2)^{1/2}}{2} = \frac{(968)^{1/2}}{2} = \mathbf{15{,}55}$$

$$\text{Perímetro} = [(4 + 4 + 49)^{1/2} + (4 + 4 + 16)^{1/2} + (16 + 16 + 9)^{1/2}] = \mathbf{18{,}85}$$

Estudo Dirigido I

4) Calcule o produto escalar dos vetores:

u = (7, 3, -2) e ***v*** = (3, 1, 2)

$u.v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

u.v = (7. 3) + (3 . 1) + (-2 . 2) = **20**

Estudo Dirigido I

5) Calcule o produto vetorial entre os vetores:

u = (7, 3, -2) e ***v*** = (3, 1, 2)

$$u \times v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (6+2) - (14+6) + (7-9) = \mathbf{(8, -20, -2)}$$

Estudo Dirigido I

6) Dois vetores no espaço 3D definem as posições de dois pontos anatômicos de interesse clínico. São eles:
u= (3, 1, 1) e *v*= (1, 2, 4)
Calcule o ângulo entre estes vetores.

u= (3, 1, 1) e *v*= (1, 2, 4)

Cos θ = $\frac{\boldsymbol{u.v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ =

$= (3.1 + 1.2 + 1.4)/\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} \, . \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}$

$= (9)/(\sqrt{11}$ * $\sqrt{21}$) = 9/(231)$^{1/2}$= 0,59 ou seja **θ = 53,66 graus**

BOA

TARDE!